ＩＤ　初等線形代数から多変数の微積分　講義報告[1]

２００８年2月3日（日）　１１：００−１３：００

最初に、Φ を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への微分可能な写像とするとき、Φ の微分 $D\Phi$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像になり、その標準行列表示がクラシカルな Φ の Jacobi 行列と一致することを示した。次に写像の合成に関する Jacobi 行列式の乗法公式を示した。また、Jacobi 行列式の応用として、「体積変換公式」、「領域上の積分の変換公式」を取り上げた。

1　変数変換

1.1　微分の Jacobi 行列式

［復習］　$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域、Φ を Ω から $\mathbb{R}^n$ への微分可能な写像とする。すなわち、Φ が $c \in \Omega$ で**微分可能**であるとは、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像 $D\Phi_{(c)}$ と $\Omega \setminus \{c\}$ を定義域とする $\mathbb{R}^n$ への相対誤差関数 Δ が存在して、

$$\Phi(x) - \Phi(c) = D\Phi_{(c)}(x-c) + \|x-c\|\,\Delta(x) \quad \lim_{x\to c}\Delta(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

を満たすことである。$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ が Ω の各点で微分可能なとき、Φ は Ω で**微分可能**であるという。

$$D\Phi : \Omega \ni x \longrightarrow D\Phi_{(x)} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$$

$D\Phi$ を Ω における Φ の**微分**または、**導関数**という。

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像 $D\Phi$ の標準行列表示を Φ の微分の *Jacobi* **行列**という。

$$J\Phi_{(x)} = \begin{pmatrix} \big\langle e_1, D\Phi_{(x)}(e_1)\big\rangle & \big\langle e_1, D\Phi_{(x)}(e_2)\big\rangle & \cdots & \big\langle e_1, D\Phi_{(x)}(e_n)\big\rangle \\ \big\langle e_2, D\Phi_{(x)}(e_1)\big\rangle & \big\langle e_2, D\Phi_{(x)}(e_2)\big\rangle & \cdots & \big\langle e_2, D\Phi_{(x)}(e_n)\big\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \big\langle e_n, D\Phi_{(x)}(e_1)\big\rangle & \big\langle e_n, D\Phi_{(x)}(e_2)\big\rangle & \cdots & \big\langle e_n, D\Phi_{(x)}(e_n)\big\rangle \end{pmatrix}$$

ここで、$\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)),\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおけば、

$$\big\langle e_j, D\Phi_{(x)}(e_k)\big\rangle = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x) \quad j,k = 1,2,\cdots,n$$

が成立するから、Jacobi 行列の classical な表現：

$$J\Phi_{(x)} = \frac{\partial(\Phi)}{\partial(x)} = \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

により、表示することができる。

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

1.2 Jacobi 行列式の乗法公式

定理 1.1. F を領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像、G を領域 $D \subset F(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像とするとき、F が Ω 上で、G が D 上でそれぞれ微分可能ならば、合成写像 $G \circ F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は Ω 上で微分可能で、

$$J_{G \circ F} = J_G \circ J_F$$

が成立する。

1.3 体積変換公式

定理 1.2. $\Omega, D \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする。Φ は Ω から D への滑らかな写像でかつ、逆写像 $\Phi^{-1} : D \to \Omega$ が存在し、Φ^{-1} も滑らかであるとする。このとき、領域 D の体積を $\|D\|$ とすれば、

$$\begin{aligned}
\|D\| &= \int_\Omega |det(J\Phi(x))| \ |dx| \\
&= \int_\Omega abs\left(\left|\frac{\partial(\Phi)}{\partial(x)}\right|\right) \ |dx| \\
&= \int_\Omega abs\left(\left|\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|\right) \ dx_1 dx_2 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

が成立する。ただし、$abs(x)$ は $x \in \mathbb{R}$ の絶対値を求める関数である。

1.4 領域上の積分の変換公式

定理 1.3. $\Omega, D \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする。Φ は Ω から D への連続微分可能な写像、g は $D \subset \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への連続関数であるとする。このとき、

$$\begin{aligned}
\int_D g(y) \ |dy| &= \int_\Omega g(\Phi(x)) |det(J\Phi(x))| \ |dx| \\
&= \int_\Omega g(\Phi(x)) abs\left(\left|\frac{\partial(y)}{\partial(x)}\right|\right) \ |dx|
\end{aligned}$$

が成立する。ただし、$abs(x)$ は $x \in \mathbb{R}$ の絶対値を求める関数である。

編集　J.S